Capítulo 1

Introducción. Problema de Decisión

1.1. Introducción

En general, se emplean diferentes términos para referirse al estudio de los problemas en los que, atendiendo a las posibles consecuencias y las circunstancias que las rodean, se ha de elegir entre diferentes alternativas. Entre los más comunes están *Teoría de La Decisión*, *Análisis de Decisiones*, *Toma de Decisiones* o *Ayuda a la Decisión*. La diferencia principal está en el punto de vista para afrontar los problemas y la actitud ante ellos. Una parte fundamental y común a todos ellos consiste en estudiar problemas sencillos para aplicar los resultados obtenidos, mediante una estructura adecuada, a problemas más complicados. Cualquier problema real se puede entender como un problema de decisión y todo el aparato matemático se puede aplicar al estudio de estos problemas. Muchos autores consideran que la Teoría de La Decisión no es más una filosofía metodológica formal para afrontar los problemas reales.

Ejemplo 1 (El problema del vendedor de periódicos)
El decisor debe fijar el número X (incógnita) de periódicos que pedir. Los datos podrían ser:

1. Precio de compra: 75 céntimos de euro cada unidad.

2. Precio de venta: 1 euro cada unidad.

3. Precio de devolución: 50 céntimos euros unidad.

Denotemos por θ el número de periódicos que se demandan en el día y sea X el número de periódicos que el dueño del quiosco compra a la empresa suministradora . Según la información que se disponga acerca de θ tenemos tres tipos de ambientes posibles:

1. *Ambiente Determinístico:* El valor de θ es conocido. Será un determinado número n.

2. *Ambiente de Riesgo:* No se conoce con exactitud el valor de θ, pero se puede asignar una distribución de probabilidad a los posibles valores de θ. Es decir, el número de periódicos demandados es una variable aleatoria (v.a.) con distribución conocida.

3. *Ambiente de Incertidumbre:* No se conoce nada cerca de θ.

Al parámetro θ se le conoce como *Estado de la Naturaleza*, X es la *Variable de Decisión o control* y la *Ganancia* producida es:

$$f(\theta = n, X = x) = \begin{cases} 25n - 25(x-n) & \text{si } x \geq n \\ 25x & \text{si } x \leq n \end{cases}$$

En ambiente determinístico se tratará simplemente de maximizar $f(n,x)$. En ambiente de riesgo se construirá una función a maximizar de la forma $g(X) = U[f(n,X)]$ que podría ser la ganancia media:

$$g(X) = E[f(n,X)] = \sum_n f(n,x)Pr(n)$$

En ambiente de incertidumbre la cuestión es aún menos clara.

Ejemplo 2 (El problema de la Cartera)
Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ distintas acciones en Bolsa y sea X_0 la cantidad disponible para invertir. Denotemos por $X_1, X_2, \ldots, X_n$ la cantidad de dinero invertido en cada tipo de acción (Cartera de Valores). La Liquidez de las acciones es la facilidad para convertirlas en dinero y la Rentabilidad es el beneficio que proporcionan. Sean $l_1, l_2, \ldots, l_n$ y $r_1, r_2, \ldots, r_n$ los parámetros de liquidez y rentabilidad por unidad monetaria de las acciones. La liquidez y rentabilidad de una cartera $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n$ son:

$$L(X) = l_1X_1 + l_2X_2 + \ldots + l_nX_n \quad \text{y} \quad R(X) = r_1X_1 + r_2X_2 + \ldots + r_nX_n.$$

Además, deben imponerse las siguientes restricciones

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} X_i &\leq X_0 \\ 0 &\leq X_i \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n \end{aligned}$$

En este problema, el estado de la naturaleza es doble, $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, con $\theta_1 = (l_1, l_2, \ldots, l_n)$ y $\theta_2 = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$, y las acciones son vectoriales, $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Se trata, por tanto, de un problema biobjetivo (deben optimizarse, de forma conjunta, dos objetivos) y unipersonal.

Ejemplo 3 (El problema de los semáforos)
Al realizar un desplazamiento en automóvil a través de una ciudad se advierten dos posibles rutas con igual longitud. Por la primera de ellas hay 3 semáforos que permanecen, independientemente, un minuto en rojo y un minuto en verde. Por la segunda ruta hay sólo un semáforo que permanece tres minutos en rojo y otros tres en verde. La decisión a adoptar depende de gran cantidad de factores a considerar: la urgencia del desplazamiento, el consumo, el tráfico, etc.

Ejemplo 4 (El problema del paraguas)
Un estudiante de la Universidad de La Laguna decide cada mañana, al levantarse, si lleva el paraguas o no al salir de casa para asistir a clase. Al decisor le disgusta mojarse pero tampoco desea llevar el paraguas en un día soleado. Generalmente escucha la información meteorológica proporcionada por una emisora radiofónica, y tras asomarse por la ventana, adopta la decisión de llevar o no el paraguas.

En este problema, el estado de la naturaleza θ puede ser *lluvioso* o *no lluvioso*. El ambiente es de riesgo, pero puede mejorar el conocimiento probabilístico sobre el estado de la naturaleza mediante la experimentación: la observación de un fenómeno que aporte información sobre θ. La experimentación en este problema consiste en oír la radio y mirar por la ventana. La época del año, el tiempo del día anterior y otro tipo de información le permite asignar una determinada probabilidad de que el día sea lluvioso. Sin embargo, la información del experimento hace modificar dicha probabilidad. Analizando la situación diaria, el decisor realiza una de las acciones posibles: *llevar* o *no llevar* el paraguas. La consecuencia depende tanto del estado de la naturaleza θ como de la acción a adoptada. Si el decisor analiza previamente el problema puede adoptar una regla de decisión consistente en una aplicación del conjunto de posibles resultados de los experimentos en el conjunto de acciones.

Aunque diferentes, los ejemplos anteriores presentan elementos comunes. Estos son los elementos fundamentales de un problema de decisión. Un problema de decisión tiene tres componentes fundamentales: 1.

1. El estado de la naturaleza, θ.
2. La acción a tomar: a.
3. La pérdida correspondiente a ambas: $L(\theta, a)$.

El problema de decisión estará formalmente definido sobre una terna $(\Theta, \mathcal{A}, L)$, donde Θ y A son los espacios de estado de la naturaleza y de la acción, y $L : \Theta \times \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ es la función de pérdida con $\mathcal{C}$ el conjunto de consecuencias. En $\mathcal{C}$ habrá definida una posible relación (por ejemplo, de orden parcial (reflexiva, antisimétrica y transitiva)). Frecuentemente $\mathcal{C}$ es un espacio numérico de dimensión k. En el caso más sencillo, $\mathcal{C} = I\!R$.

1.2. El proceso de Decisión

En general, el proceso de decisión consta de cinco pasos: análisis previo, análisis estructural, análisis de incertidumbre, análisis de utilidad y análisis de optimización.

1. *Análisis Previo.* El problema debe quedar perfectamente identificado y las diferentes alternativas fijadas. Puede existir un único o varios decisores que están indecisos acerca de las acciones que pueden tomar ante un determinado problema. A diferencia de la teoría de juego, los diferentes decisores no tienen intereses contrapuestos aunque generalmente no son exactamente coincidentes pero la decisión será única.
2. *Análisis Estructural.* Hay que estructurar la anatomía del problema. Esta parte está encaminada a que el decisor conozca concretamente que decisiones puede tomar en cada momento, cuales de tales alternativas son realmente diferentes y cuales se pueden postergar, como se puede usar la información obtenida a lo largo del proceso para las elecciones sucesivas, que experimentos se pueden realizar y que información pueden proporcionar. La respuesta a estas cuestiones sirve para confeccionar el árbol de decisión que resume todo el proceso de decisión. En este árbol existen dos tipos de nodos, los nodos de decisión donde la rama por la que continua el proceso es controlada por los decisores, y los nodos de probabilidad, donde es el azar el que determina la rama del árbol en la que continuaran las actuaciones.

3. *Análisis de Incertidumbre.* Se asignan probabilidades a cada una de las ramificaciones de los nodos de probabilidad. Tales asignaciones deben realizarse de acuerdo a conocimientos objetivos o subjetivos de la realidad en que está inmerso el problema. Generalmente las asignaciones estarán basados en datos empíricos, suposiciones fundamentadas en modelos probabilísticos o testimonios de determinados expertos.

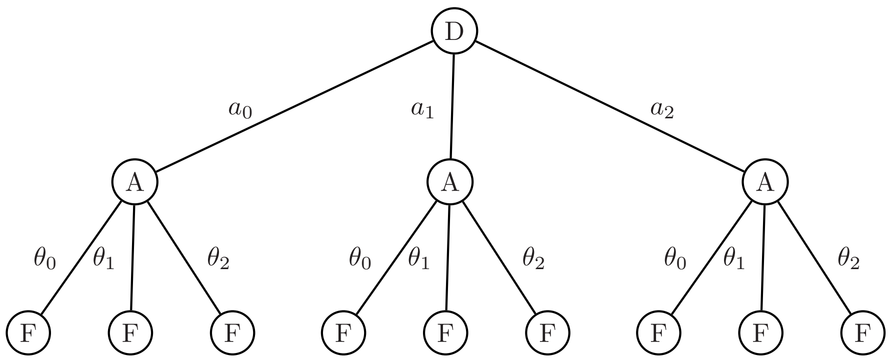
4. *Análisis de Utilidad.* Se estudian las consecuencias de los distintos resultados posibles de las decisiones. A las distintas posibilidades se le asignarán costes y/o beneficios objetivos o subjetivos para los propios decisores y también para los que estos consideran como parte interesada en su problema de decisión. Generalmente este estudio va encaminado a establecer las relaciones de preferencia entre las distintas consecuencias posibles, teniendo en cuenta la actitud de los decisores ante el riesgo de obtener una consecuencia muy deseada o poco deseada con determinada probabilidad. Usualmente se realiza una valoración numérica (unidimensional o pluridimensional) de cada una de las posibles consecuencias reflejadas en una función de utilidad.

5. *Análisis de Optimización.* Se elige la estrategia óptima. Una vez estructurado el problema, con las probabilidades y utilidades debidamente asignadas el decisor debe elegir la estrategia óptima. Esta estrategia debe indicar que acciones se deben tomar en cada una de las circunstancias posibles de todo el proceso de decisión.

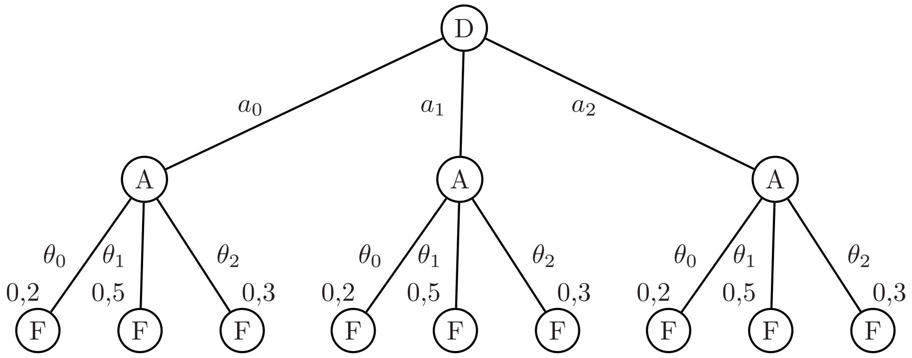
Ejemplo 5
Un distribuidor de prensa ofrece a un kiosco una nueva revista especializada.

1. *Preanálisis.* El propietario del kiosco toma conciencia de que se le plantea un problema de decisión. Sabe que sólo tiene dos clientes que pueden estar interesados en dicha revista por lo que sus posibles acciones son: no pedir ningún ejemplar (acción a_0), pedir 1 ejemplar (acción a_1), o pedir 2 ejemplares (acción, a_2). Además, el estado de la naturaleza, θ, puede tomar uno de tres valores $\theta = \theta_0 = 0$, $\theta = \theta_1 = 1$ ó $\theta = \theta_2 = 2$,

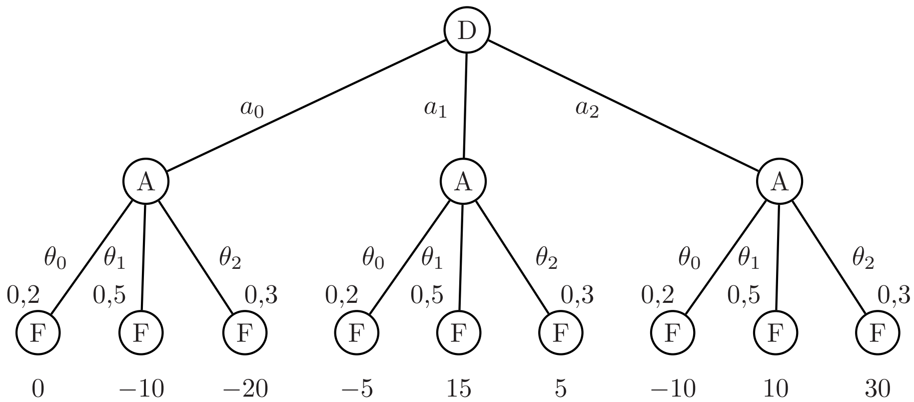
2. *Análisis estructural.* Se realiza una descripción gráfica del problema en forma de un árbol como el siguiente:



3. *Análisis de incertidumbre.* Después de meditar sobre sus clientes, el contenido y precio de los ejemplares propuestos llega a la conclusión de que la probabilidad de que ambos clientes se interesen por la revista es $0'3$, de que ninguno de ellos lo haga es $0'2$ y, por tanto, de que sólo uno de ellos se interese es $0'5$.



4. *Análisis de utilidad.* El vendedor tiene que pagar 2 euros al distribuidor por cada ejemplar cuyo precio de venta al público es de 3,5 euros recuperando sólo 1,5 euros por ejemplar no vendido. Estudiando las consecuencias de cada una de las acciones posibles según las posibles actitudes de sus clientes (estados de la naturaleza), valorando lo que significa no poder satisfacer un cliente, obtiene una descripción gráfica más detallada del problema:



5. *Análisis de optimización.* Estableciendo la utilidad de cada acción como la ganancia esperada obtiene la siguiente valoración:

Acción	Ganancia esperada	Utilidad
a_0	$u(a_0) = 0 \cdot 0{,}2 + (-10) \cdot 0{,}5 + (-20) \cdot 0{,}3 =$	$-70/6$
a_1	$u(a_1) = (-5) \cdot 0{,}2 + 15 \cdot 0{,}5 + 5 \cdot 0{,}3 =$	$43/6$
a_2	$u(a_2) = (-10) \cdot 0{,}2 + 10 \cdot 0{,}5 + 30 \cdot 0{,}3 =$	13

Por tanto, la elección de mayor utilidad es a_2, que es la adoptada por el decisor.

1.3. Clasificación de los problemas de decisión

Los problemas de decisión se pueden clasificar de acuerdo a diferentes aspectos:

1. *Número de Decisores.* Atendiendo al número de decisores los problemas pueden clasificarse en problemas de decisión individual y problemas de decisión colectiva. Aunque en muchas ocasiones cuando las decisiones las toma un comité, se puede considerar que actúan como una persona, es importante estudiar el proceso mediante el cual se llega a tomar una única decisión.

2. *Ambiente del Problema.* Los estados de la naturaleza están determinados por un conjunto de características que particularizan cada una de las situaciones ajenas al control del decisor que pueden influir en las consecuencias de sus acciones. En relación al conocimiento que se tiene acerca del estado de la naturaleza en el que tendrá efecto la decisión, los problemas se pueden clasificar en:

   a) *Ambiente Determinístico:* cuando se conoce exactamente que estado de la naturaleza se presenta.

   b) *Ambiente de Riesgo:* cuando se conoce la distribución de probabilidad que rige la aparición de los estados de la naturaleza.

   c) *Ambiente de Incertidumbre:* cuando se ignora cualquier información acerca de qué estados de la naturaleza tendrán lugar.

   d) *Ambiente de Concurrencia:* cuando los resultados de las acciones son consecuencia de las acciones de dos o más individuos con intereses parcialmente contrapuestos y cada uno de ellos actúa exclusivamente en su propio interés pensando que se enfrenta con otros individuos que se comportan como él. De estos problemas de decisión se ocupa la Teoría de Juegos.

   e) *Procesos de Votación:* cuando varios individuos tienen que tomar conjuntamente una decisión con el propósito de beneficiar por igual a todos ellos.

3. *Número de acciones.* El número de acciones posibles puede ser finito, numerable o infinito. Puede venir descrito por una variable aleatoria discreta, continua o vectorial.

4. *Número de estados.* La variable o variables que describen el estado de la naturaleza pueden tener un carácter de variable aleatoria discreta, continua o vectorial.

5. *Consecuencias.* Las consecuencias de las decisiones del decisor pueden ser de tipo cualitativo o cuantitativo, pudiendo ser de tipo vectorial.

6. *Preferencias sobre las consecuencias.* El decisor debe establecer comparaciones entre las diferentes consecuencias de sus acciones manifestando sus preferencias. El sistema de preferencias así obtenidas debe verificar ciertas condiciones más o menos estrictas, dando lugar a un sistema más o menos completo que puede llegar incluso a establecer una valoración numérica (vectorial o no) de las consecuencias. Esto facilitará el tratamiento matemático apropiado al problema de decisión, pero no siempre es factible ni incluso conveniente.

7. *Número de etapas.* En relación al número de etapas (y su duración) en las que se deben tomar las decisiones, el problema pude ser unietápico o polietápico. Este último caso corresponde a la decisión secuencial, donde el número de etapas puede ser finito o infinito, fijo o variable, pudiendo ser el número de ellos determinístico o aleatorio.

1.4. Teoría de juegos

La Teoría de Juegos se ocupa de desarrollar estrategias óptimas de actuación en situaciones competitivas que incluyen dos o más oponentes inteligentes. Estas situaciones se presentan en desarrollo de negocios, acciones militares o políticas o en juegos.

Los oponentes se suelen llamar jugadores, sus acciones individuales se llaman movimientos y las reglas decisión son las estrategias que consisten en la especificación del movimiento (o distribución de probabilidad sobre ellos) que corresponde a cada conjunto de información. La función de pérdida se traduce en una función de pago para cada uno de los jugadores.

El tipo de problemas más sencillo corresponde al número de jugadores mínimo que es 2. Estos problemas se llaman *Juegos Bipersonales*. La principal simplificación consiste en que no se pueden presentar cooperaciones ni coaliciones entre jugadores. Se denominan *Juegos de Suma Nula* aquellos en que la suma de las consecuencias para cada uno de los jugadores es nula. El tipo de juegos más comunes son los *Juegos Bipersonales de Suma Nula*, en los que cada jugador trata de maximizar su ganancia o minimizar la pérdida que supone lo que debe pagar a su oponente.

Aunque desde el punto de vista de las aplicaciones prácticas estos juegos son bastantes raros, su estudio es matemáticamente muy sencillo. Denotemos por I al primer jugador y por II a su oponente. Sean $A = \{a_i \in I\}$ y $B = \{b_j \in J\}$ las acciones de los jugadores I y II. El pago al jugador I correspondiente al par de acciones a_i de I y b_j de II se denota por $p_{ij} = p(a_i, b_j)$. Si $\mid I \mid = n$ y $\mid J \mid = m$ se representa el juego por la matriz de pagos:

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1j} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2j} & \cdots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{i1} & p_{i2} & \cdots & p_{ij} & \cdots & p_{im} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nj} & \cdots & p_{nm} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 6
Cada jugador extiende a la vez sus dos manos mostrando dos uno o ningún dedo en cada una de ellas. La mano derecha del jugador indica su elección y la mano izquierda su pronóstico de la elección del otro. Si un jugador acierta en su pronóstico recibe del otro jugador la suma de los dedos mostrados por el acertante. Si ninguno de los dos jugadores acierta, el que halla mostrado más dedos recibe de su oponente la suma de todos los dedos mostrados. La matriz de pagos del jugador I es la siguiente:

	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(2,0)	(2,1)	(2,2)
(0,0)	1	-1	-2	0	-2	-3	0	-3	-4
(0,1)	1	0	-3	0	-2	-3	-1	-4	-5
(0,2)	2	3	0	2	0	-5	0	-3	-4
(1,0)	0	0	-2	0	1	-4	-3	1	-5
(1,1)	2	2	0	-1	0	-3	0	2	-6
(1,2)	3	3	5	4	3	0	-2	0	-4
(2,0)	0	-1	0	3	0	2	0	-3	-2
(2,1)	3	4	3	-1	-2	0	3	0	3
(2,2)	4	5	4	5	6	4	-2	-3	0

Generalmente se supone que cada jugador puede aleatorizar su decisión y sortear entre las distintas acciones o movimientos. Una estrategia del jugador I puede consistir en elegir la acción a_i con probabilidad $p_i, i \in I$. Entonces el pago es aleatorio y el decisor puede preferir un pago a otro dependiendo del pago medio, la varianza, etc. En este caso el conjunto de estrategias posibles del jugador I serían las distribuciones de probabilidad sobre A, denotadas $\mathcal{P}(A)$. Análogamente para el jugador II. Las opciones del jugador I son todas las estrategias aleatorizadas o distribuciones de probabilidad sobre A. Una estrategia aleatorizada α para el jugador I es un elemento $\alpha \in \mathcal{P}(A)$, una estrategia aleatorizada β para II es una distribución $\beta \in \mathcal{P}(B)$. La función de pago vendrá evaluada por una función $p(\alpha, \beta)$. Los resultados son análogos para A y B que para $\mathcal{P}(A)$ y $\mathcal{P}(B)$, aunque ahora los conjuntos de opciones son mayores.

Puesto que cada jugador tratará de maximizar su beneficio minimizando el pago a su oponente un criterio razonable sería seleccionar la estrategia que haga mínima la pérdida máxima que puede infringirle su oponente. Este criterio se conoce como *Criterio Minimax*. Para cada estrategia $a \in A$, el jugador II presta su atención al peor pago que debe hacer:

$$\max_{a \in A} p(a, b).$$

Entonces, el jugador II elige la estrategia $b^* \in B$ tal que

$$\max_{a \in A} p(a, b^*) = \min_{b \in B} \max_{a \in A} p(a, b) = V.$$

A b^* se le conoce como *estrategia minimax* y a V como *valor superior* del juego.

Análogamente, el jugador I escoge la estrategia $a^* \in A$ tal que

$$\min_{b \in B} p(a^*, b) = \max_{a \in A} \min_{b \in B} p(a, b) = v.$$

A a^* se le conoce como *estrategia maximin* y a v como *valor inferior* del juego.

En general, $v \neq V$. Si $v = V$ se dice que el juego está estrictamente determinado, en el sentido de que a ninguno de los dos jugadores les conviene desviarse de la estrategia minimax o maximin. En este caso, cada el jugador I recibe $v = V = p(a^*, b^*)$.